# Příklad 1:

Řešte exponenciální rovnici:

x=? $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{3x+9} = 27(x+1)^3 - 6$$

$$\sqrt[3]{3x+9} = 27(x+1)^3 - 6 = y$$

$$\sqrt[3]{3x+9} = y \rightarrow 3x+9 = y^3 \quad --- (1)$$

$$27(x+1)^3 - 6 = y \rightarrow 3^3(x+1)^3 - 6 = y$$

$$(3x+3)^3 - 6 = y \quad ---$$

$$(1)+(2): \quad 3x+9+(3x+3)^3 - 6 = y^3 + y$$

$$(3x+3)^3 + (3x+3) = y^3 + y$$

$$\therefore \quad 3x+3 = y$$

$$\sqrt[3]{3x+9} = y = 3x+3$$

$$3x+9 = (3x+3)^3 \rightarrow (3x+3)^3 - (3x+3) - 6 = 0$$

substituce: $3x+3 = a$ $\qquad a^3 - a - 6 = 0$

| | 1 | 0 | -1 | -6 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 4 | 6 |
| | 1 | 2 | 3 | 0 |

$$(a-2)(a^2+2a+3) = 0$$

$$a-2 = 0 \quad \vee \quad a^2+2a+3 = 0$$

$$a = 2 \qquad \Delta = 4-4(3) = -8$$

$$3x+3 = 2$$

$$\boxed{x = -1/3}$$

# Příklad 2:

Určete hodnotu výrazu:

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt[5]{2500} + \sqrt[5]{625}}}{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{8}}} = ?$$

substituce: $x = 2^{1/5}$ ; $y = 5^{1/5}$

$$\sqrt[5]{2500} = (5^4 \cdot 2^2)^{1/5} = y^4 \cdot x^2$$

$$\sqrt[5]{625} = (5^4)^{1/5} = y^4$$

$$A = \frac{\sqrt{y^4x^2+y^4}}{(1+x+x^3)^{1/5}} \rightarrow A^{10} = \left(\frac{y^2(x^2+1)^{1/2}}{(1+x+x^3)^{1/5}}\right)^{10}$$

$$A^{10} = \frac{y^{20}(x^2+1)^5}{(1+x+x^3)^2} \qquad x^5 = 2 \; ; \; y^5 = 5$$

$$A^{10} = \frac{5^4(\overset{4}{x^{10}} + 5x^8 + \overset{10x^3}{10x^6} + \overset{20x}{10x^4} + 5x^2 + 1)}{1 + x^2 + \underset{2x}{x^6} + 2x + 2x^3 + 2x^4}$$

$$A^{10} = \frac{5^4 \cdot 5(2x^4+2x^3+x^2+4x+1)}{2x^4+2x^3+x^2+4x+1} = 5^5$$

$$\boxed{A = \sqrt{5}}$$

## Příklad 3:

Určete hodnotu výrazu:

$$\frac{\sqrt{\tan 75°}-\sqrt{\tan 15°}+2\sqrt{3}}{\sqrt{\tan 75°}+\sqrt{\tan 15°}+\sin^2 25°+\sin^2 65°} = ?$$

$\sin^2 25°+\sin^2 65° = 1$ ; $\tan 15° = \mathrm{ctan}\, 75°$

$$\frac{\sqrt{\frac{\sin 75°}{\cos 75°}}-\sqrt{\frac{\cos 75°}{\sin 75°}}+2\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{\sin 75°}{\cos 75°}}+\sqrt{\frac{\cos 75°}{\sin 75°}}+1} = \frac{\frac{\sin 75°-\cos 75°}{\sqrt{\cos 75° \sin 75°}}+2\sqrt{3}}{\frac{\sin 75°+\cos 75°}{\sqrt{\cos 75° \sin 75°}}+1}$$

$$= \frac{(\sin 75°-\cos 75°+2\sqrt{3}\sqrt{\cos 75° \sin 75°})\sqrt{2}/2}{(\sin 75°+\cos 75°+\sqrt{\cos 75° \sin 75°})\sqrt{2}/2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45° = \cos 45°$$

$$= \frac{\sin 75° \cos 45° - \cos 75° \sin 45° + 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{2}{2}\cos 75° \sin 75°}}{\sin 75° \cos 45° + \cos 75° \sin 45° + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{2}{2}\cos 75° \sin 75°}}$$

$$\sin(\alpha \pm \theta) = \sin\alpha\cos\theta \pm \cos\alpha\sin\theta$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= \frac{\sin(75°-45°)+\sqrt{3}\sqrt{\sin 150°}}{\sin(75°+45°)+\frac{1}{2}\sqrt{\sin 150°}} = \frac{\sin 30° + \sqrt{3}\sqrt{\sin 30°}}{\sin 120° + \frac{1}{2}\sqrt{\sin 30°}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

## Příklad 4:

Řešte exponenciální rovnici:

$$\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=7 \qquad x=?$$

substituce: $\left.\begin{array}{l} 8-x = a^3 \\ 27+x = b^3 \end{array}\right\}$ $a^3+b^3 = 35$

$$\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=7$$

$$a^2 - ab + b^2 = 7$$

Vzorec: $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$35 = (a+b)7 \rightarrow a+b = 5$

$a = 5-b$

Vzorec: $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

$5^3 = 35 + 3ab(5) \rightarrow ab = 6$

$(5-b)b = 6 \rightarrow b^2-5b+6 = 0$

$(b-2)(b-3) = 0$

$b = 2 \quad \vee \quad b = 3$

$a = 5-b$ : $a = 3 \qquad a = 2$

$8-x = a^3$ : $\boxed{x = -19 \; ; \; x = 0}$

## Příklad 5:

Pro jaká x platí rovnice:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1+\frac{1}{2025}\right)^{2025} \qquad x=?$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1+\frac{1}{2025}\right)^{2025}$$

$$=\left(\frac{2026}{2025}\right)^{2025}$$

$$=\left(\frac{2025}{2026}\right)^{-2025}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2026}\right)^{-2026+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1+\frac{1}{-2026}\right)^{-2026+1}$$

$$\boxed{x=-2026}$$

## Příklad 6:

Řešte iracionální rovnici:

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-36}=3 \qquad x-\frac{1}{x}=?$$

**Vzorec:** $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$

$$\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-36}\right)^3=3^3$$

$$x-(x-36)-3\sqrt[3]{x(x-36)}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-36}\right)=27$$

$$36-3\sqrt[3]{x(x-36)}.3=27$$

$$\sqrt[3]{x(x-36)}=1$$

$$x^2-36x=1 \rightarrow \frac{x^2-36x-1}{x}=\frac{0}{x}$$

$$x-36-\frac{1}{x}=0$$

$$x-\frac{1}{x}=\boxed{36}$$

## Příklad 7:

Řešte exponenciální rovnici:

x=?

$$\left(4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x=\frac{8x}{54x+27}$$

$$\left(4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^x=\frac{8x}{54x+27}$$

$$\left(\frac{4x^2+4x+1}{x^2}\right)^x=\frac{8x}{27(2x+1)}$$

$$\left(\frac{(2x+1)^2}{x^2}\right)^x=\left(\frac{2x+1}{x}\right)^{2x}=\frac{8}{27}\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

sea: $\frac{2x+1}{x}=n$ ; $\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{n}$

$$n^{2x}=\frac{8}{27}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow n^{2x}\cdot n=\frac{2^3}{3^3}$$

$$\Rightarrow n^{2x+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x+1}{x}\right)^{2x+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

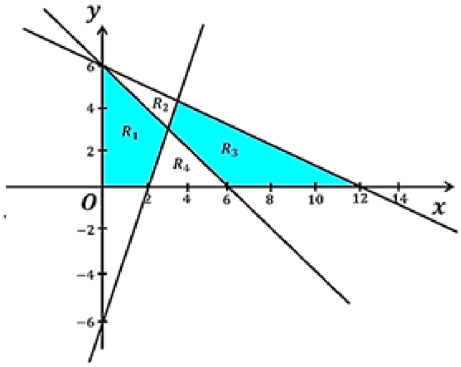
$$2x+1=-3 \Rightarrow x=-2$$

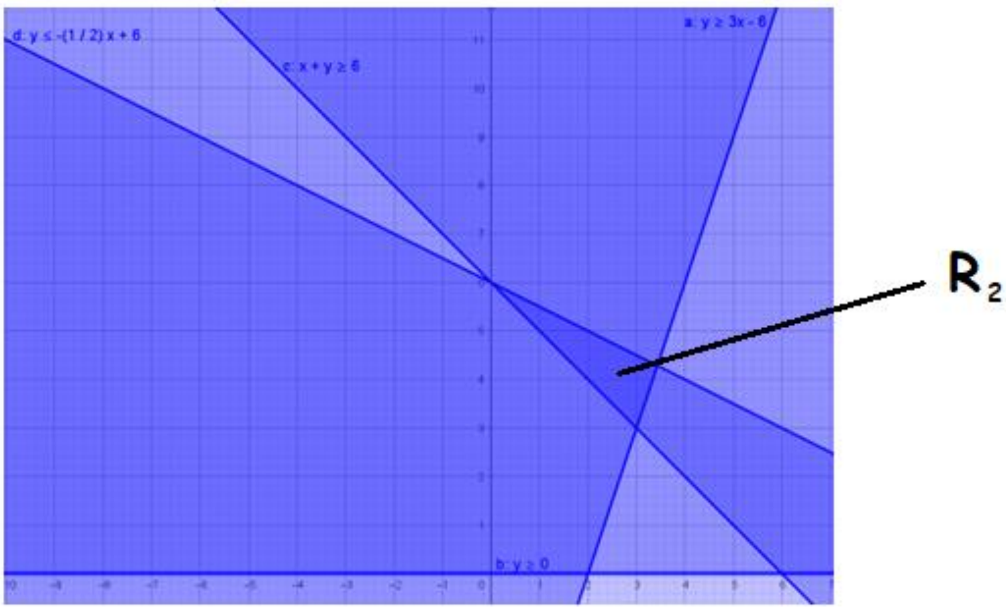
$$\frac{2x+1}{x}=\frac{3}{2} \Rightarrow 4x+2=3x \Rightarrow \boxed{x=-2}$$

## Příklad 8:

Která z následujících oblastí splňuje níže uvedené čtyři nerovnosti

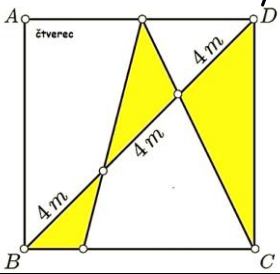
$y \geq 3x-6$ ; $y \geq 0$ ; $y \leq -\frac{1}{2}x+6$ ; $x+y \geq 6$



## Příklad 9:

Určete velikost vybarvené plochy:




Úkolem je vypočítat celkovou plochu tří žlutých trojúhelníků v tomto čtverci.
Nejprve si ujasníme rozměry čtverce. Úhlopříčka je rozdělena na tři stejné části po 4 m, takže její celková délka je 12 m.
Z toho můžeme vypočítat plochu celého čtverce S:

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{12^2}{2} = \frac{144}{2} = \mathbf{72}\ \mathrm{m}^2$$

Nyní určíme plochu jednotlivých trojúhelníků jako zlomky celkové plochy čtverce (pro zjednodušení si označíme stranu čtverce jako a):

**Pravý trojúhelník:** Jeho základnou je celá strana čtverce CD = a. Výška k této základně odpovídá vzdálenosti bodu na úhlopříčce od strany CD, což je 1/3 délky strany (protože bod je ve 2/3 cesty od B k D).

1. $\text{Plocha}_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{6} = \frac{72}{6} = \mathbf{12}\ \mathrm{m}^2$

**Prostřední trojúhelník:** Pomocí analytické geometrie (nebo podobnosti trojúhelníků) lze zjistit, že horní vrchol leží přesně v polovině horní strany čtverce. Výpočet plochy trojúhelníku s vrcholy v

$[\frac{a}{2}, a]$, $[\frac{a}{3}, \frac{a}{3}]$ a $[\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}]$

nám dává:

$$\text{Plocha}_2 = \frac{a^2}{12} = \frac{72}{12} = \mathbf{6}\ \mathrm{m}^2$$

**Levý trojúhelník:** Podobně zjistíme, že jeho základna na spodní straně čtverce má délku a/4 a výška je a/3:

$$\text{Plocha}_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{24} = \frac{72}{24} = \mathbf{3}\ \mathrm{m}^2$$

Sečteme plochy všech tří trojúhelníků:

$$12 + 6 + 3 = \mathbf{21}\ \mathrm{m}^2$$

Celková plocha žlutých částí je tedy 21 $\mathrm{m}^2$

## 2. Odvození vrcholů na stranách čtverce

Z obrázku vyplývá, že vrcholy žlutých trojúhelníků leží v průsečících spojnic s hranami čtverce:

- **Pravý trojúhelník (T1):** Jeho základna je celá strana $CD$ délky $a$. Horní vrchol je v bodě $P_1$. Vzdálenost $P_1$ od strany $CD$ (výška $v_1$) je přesně $a/3$.

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{6}$$

- **Prostřední trojúhelník (T2):** Horní vrchol $V$ leží na straně $AD$. Spojnice vedou z $V$ do $P_1$ a $P_2$. Aby byla geometrie symetrická (jak naznačuje obrázek), vrchol $V$ leží v polovině strany $AD$, tedy v bodě $[0, \frac{a}{2}]$. Výpočet plochy s vrcholy $[0, \frac{a}{2}]$, $[\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}]$ a $[\frac{2a}{3}, \frac{a}{3}]$ vede k:

$$S_2 = \frac{a^2}{12}$$

- **Levý trojúhelník (T3):** Základna leží na spodní straně $AB$. Průsečík přímky procházející $D$ a $P_1$ se stranou $AB$ dává základnu o délce $a/4$. Výška k bodu $P_2$ je opět $a/3$.

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{24}$$

Sečtením dílčích zlomků získáme:

$$\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{24} = \frac{4a^2 + 2a^2 + a^2}{24} = \frac{7a^2}{24}$$

Dosazením $a^2 = 72$:

$$\frac{7 \cdot 72}{24} = 7 \cdot 3 = \mathbf{21}\ \mathrm{m}^2$$

# Příklad 10:

Řešte pravoúhlý trojúhelník, jsou-li dány poloměry: kružnice opsaná r = 5, kružnice vepsaná $\rho$ = 2. (Určete a, b)

$$\textit{Dáno}: \ r = 5;\ \rho = 2$$

$$\textit{Platí}: \ r = \frac{\;}{2} \Rightarrow c = 2r = 10; \quad \rho = \frac{a+b-c}{2} \Rightarrow 14 = a + b$$

$$\textit{Platí}: \ a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 100$$

$$\textit{Budeme řešit rovnice}:$$

$$14 = a + b \Rightarrow b = 14 - a$$

$$100 = a^2 + b^2 \ \textit{dosadíme}\ b = 14 - a$$

$$100 = a^2 + (14 - a)^2 \Rightarrow 100 = a^2 + 196 - 28a + a^2 \Rightarrow 2a^2 - 28a + 96 = 0$$

$$\textit{Kvadratická rovnice}: a^2 - 14a + 48 = 0 \Rightarrow a_1 = 8 \ \ a_2 = 6$$

**Rozměry pravoúhlého trojúhelníku jsou:**
**a = 8, b = 6, c = 10**

## Příklad 11:

V pravém ohnisku elipsy $\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$ je vztyčena kolmice a, v koncovém bodě (průsečík kolmice a elisy) je vedena tečna. Stanovte plochu trojúhelníku omezeného osami souřadnic a tečnou?

V pravém ohnisku elipsy $\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$ je vztyčena kolmice a v koncovém bodě na křivce je vedena tečna. Stanovte plochu $\triangle$ omezeného osami souřadnic a tečnou!

$$E = a^2 = 25,\ b^2 = 9$$

kolmice v ohnisku je parametr:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{5} = 1{\cdot}8 = y_1$$

$$T\,(4,\ 1{\cdot}8) \qquad x_1 = e = \sqrt{a^2-b^2} = 4$$

$$t = \frac{xx_1}{25} + \frac{yy_1}{9} = 1$$

$$\frac{4x}{25} + \frac{1{\cdot}8\,y}{9} = 1$$

$$4x + 5y = 25$$

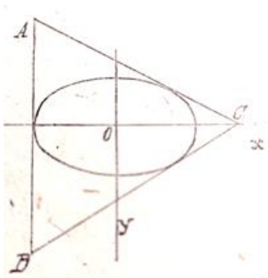
průsečíky a osami: $x = 0,\quad y = 5$

$$y = 0,\quad x = \frac{25}{4}$$

vrcholy $\triangle$: $O\,(0, 0),\quad M\left(\frac{25}{4},\ 0\right),\quad N\,(0, 5)$

$$\triangle = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{4}\,.\,5\right) = 15\frac{5}{8}.$$

## Příklad 12:




Kolem elipsy $3x^2+16y^2=48$ je opsán rovnostranný trojúhelník. Jak velký je jeho obsah, je-li jeden jeho vrchol v prodloužení velké osy?

Strana $AC$ svírá úhel $150^0$, $\operatorname{tg} 150^0 = k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{3x_1}{16y_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1\sqrt{3} &= 16y_1 \\ 3x_1^2 + 16y_1^2 &= 48 \end{aligned}\right\}$$

Řešením bod dotyku v 1. kvadrantě $x_1 = \frac{16}{5}$, $y_1 = \frac{3\sqrt{3}}{5}$

$$\overline{AC} = t \equiv 3xx_1 + 16yy_1 = 48$$

$$3x\frac{16}{5} + 16y\frac{3\sqrt{3}}{5} = 48$$

průsečík $\overline{AC}$ s osou $x$: $y = 0$

$$3m\frac{16}{5} = 48, \quad m = 5$$

$$\Delta = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{v}{\sqrt{3}} = \frac{(m+a)^2}{\sqrt{3}} = \frac{(5+4)^2}{\sqrt{3}} = 27\sqrt{3}.$$

Řešení v Geogebře: